Komplexe Zahlen

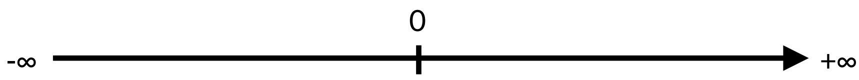
Eine Zusammenfassung

Raphael Haenggi

Inhaltsverzeichnis

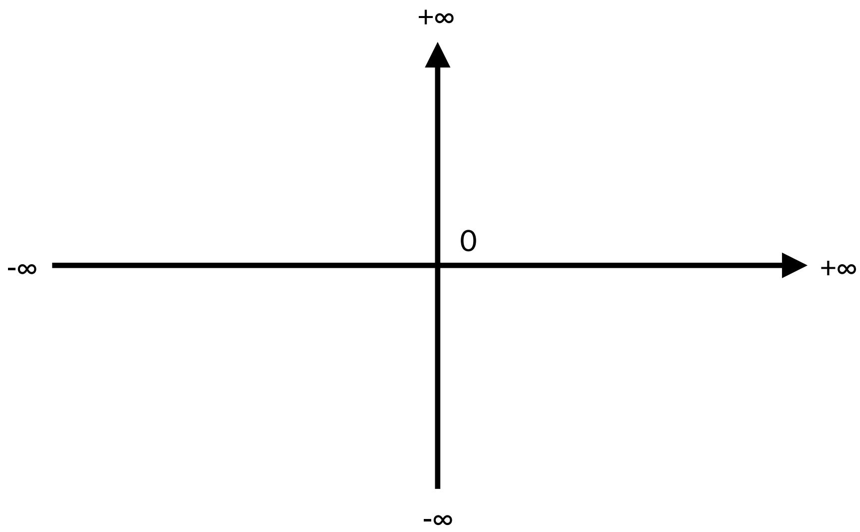
Einführung

Was ist eine komplexe Zahl? Zunächst muss man sich vorstellen, was eine Reelle Zahl ist. Dazu kann man sich den Zahlenstrahl zur Hilfe nehmen:



Jede Reelle Zahl hat auf diesem Zahlenstrahl einen Platz. Sei das 3421 oder 5.41234 oder $\boldsymbol{\pi}$.

Stellen Sie sich nun 90° verschoben zu dieser Achse eine weitere vor:



Um eine Zahl vom Reellen Zahlenstrahl auf diesen „imaginären“ Zahlenstrahl zu verlegen gibt es die sogenannte imaginäre Einheit i.

In der Elektrotechnik wird stattdessen der Buchstabe j verwendet, um einer Verwechslung mit einer durch i oder $i(t)$ bezeichneten, von der Zeit t abhängigen Stromstärke vorzubeugen.

Beispiel: Um „5“ vom reellen Zahlenstrahl auf den Komplexen zu verlegen, somit um 90° gegen den Uhrzeigersinn zu „drehen“ multipliziert man sie mit i, also so: $x = 5i$
„Dreht“ man 5 um 180°, also $x = 5 \times i \times i = 5 \times i^2$, dann ergibt das gerade -5. Folglich ist $i^2 = -1$.

Rechnen mit komplexen Zahlen

Mit imaginären Zahlen zu rechnen ist nicht sehr viel anders als mit reellen Zahlen zu rechnen - man kann sie auch addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, auf genau gleiche Weise wie die reellen Zahlen.

$i(5) + i(2) = i(7) \qquad i(5) \times i(2) = i(10)$

Zusammengesetzte Zahlen

Rechnet man mit Zahlen mit einem reellen und komplexen Anteil, wird die ganze Geschichte ein bisschen komplizierter, aber nicht wirklich schwieriger:

Zahl 1: $(a + ib)$

Zahl 2: $(c + id)$

Addition: $(a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$

Subtraktion: $(a + ib) - (c + id) = a - c + i(b - d)$

Multiplikation:

$$(a + ib) \times (c + id)$$
$$ac + ibc + iad + ib \times id$$
$$ac + ibc + iad + i^2bd$$
$$= ac + i(bc + ad) - bd$$

Division:

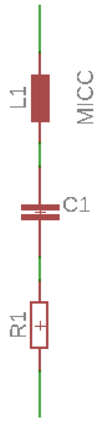
$$\frac{(a + ib)}{(c + id)} \times \frac{(c - id)}{(c - id)}$$ Mit dem Nenner erweitern

$$\frac{\left(a + ib\right) \times \left(c - id\right)}{c^2 + d^2}$$ (weil $-i^2 = 1$)

$$= \frac{\left(ac + bd\right) + i\left(bc - ad\right)}{c^2 + d^2}$$

Komplexe Zahlen in der Elektrotechnik

In der Elektrotechnik muss oft mit Kapazitäten und Induktivitäten im Wechselspannungsbereich gerechnet werden. Diese haben eine Phasenverschiebung und können daher nicht direkt verrechnet werden.
Bis jetzt war die einfachste Möglichkeit, diese geometrisch zu verrechnen. Ein Beispiel für einen Widerstand, Spule und Kondensator in Serie:

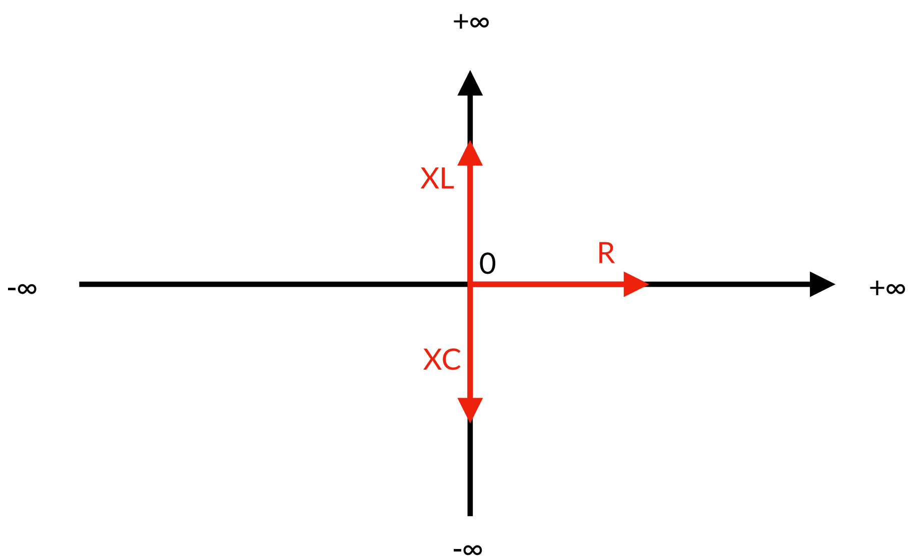


$$Z = \sqrt{R^2 + (Xc - Xl)^2}$$

Es kann sehr komplex werden, weil man immer die «Richtung» der Phasenverschiebung sowie den Wert beachten muss. Wenn diese nun nicht mehr schön 90° betragen, benötigt man die trigonometrischen Formeln…

Anstatt mit geometrisch mit Vektordiagrammen und Winkeln zu rechnen kann man sich auch die komplexe Zahlen zur Hilfe ziehen. Wie sie sehen, zu der Elektrotechnik passen diese hervorragend.

Betrachtet man wieder den Zahlenstrahl (Zahlenraum):



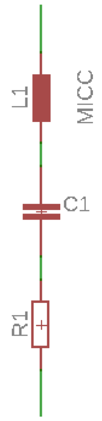
Dann fällt auf, dass man die Blindwiderstände von Kapazitäten, Induktivitäten und normalen Widerständen alle mit komplexen und reellen Zahlen ausdrücken kann (Da wir uns hier in der Elektrotechnik befinden, benutzen wir anstatt ein i ein j - um nicht komplexe Zahlen mit $i(t)$, der von der Zeit abhängigen Stromstärke zu verwechseln):

$$X_R = R + i0$$

$$X_C = 0 + \frac{1}{j\omega C} \qquad \text{wobei} \quad \omega = 2\pi f$$

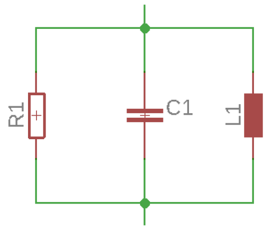
$$X_L = 0 + j\omega L$$

Anstatt mit Winkel und Betrag von Pfeilen oder Dreiecken zu rechnen, kann man jetzt Koordinaten zusammen rechnen.



Serie:

$$Z_{tot} = Z_R + Z_C + Z_L = R + \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L\right)$$



Parallel:

$$Y_{tot} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \quad \text{und} \quad Z_{tot} = \frac{1}{Y_{tot}}$$

Wie man mit komplexen Zahlen rechnet ist von Taschenrechner zu Taschenrechner unterschiedlich - grundsätzlich kann man aber am Schluss mit Pythagoras aus den zwei Werten (Reeller und Komplexer Anteil) die schlussendliche Grösse berechnen.